BEISPIELE AUS ANDEREN WISSENSGEBIETEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Walter Kranzer, Wien

Die durchaus legitime, immer wiederkehrende Schülerfrage nach dem Nutzen dieses oder jenes Teilgebietes der Mathematik wird am überzeugendsten durch Anwendungsbeispiele aus anderen Wissensgebieten beantwortet. Daneben existiert noch eine Reihe weiterer Gründe, fachfremdes Gedankengut in den Mathematikunterricht einzubauen:

(a) Da gilt es einmal, das "Scheuklappen-Denken" zu bekämpfen, das keinen Blick über den Zaun des eigenen Faches wirft. Wie oft stehen Schüler einfachen mathematischen Überlegungen hilflos gegenüber, nur weil sie im Unterricht eines anderen Gegenstandes anfallen, obwohl die Schüler denselben Anforderungen durchaus gewachsen wären, würden diese im Rahmen des Mathematikunterrichtes erhoben werden. Deshalb werden auch vom Gesetzgeber fachübergreifende Themenstellungen gewünscht.

(b) Ein anderer pädagogischer Vorteil ist in der Möglichkeit zu erblicken, zugleich mit der Motivation auch Interessen zu wecken, die dem Schüler die nähere Beschäftigung mit der angebotenen Materie schmackhaft, ja begehrt machen, und so den einen oder den anderen Jugendlichen sogar zu selbständigen Arbeiten außerhalb der Schule veranlassen.

(c) Das bloße Auswendiglernen von Formeln ist sinnlos, ist oft Ursache der Abneigung gegen die Schule. Erst die Fähigkeit, Formeln numerisch auszuwerten, sowie die Ergebnisse inhaltlich zu deuten, rechtfertigt die Vermittlung von Formeln. In der Geometrie gelingt das ohne Schwierigkeiten, nicht so in der Physik, die vor allem von dieser Manipulationsschwäche betroffen ist. Es kostet dem Mathematiklehrer keine Sekunde, wenn er etwa in der Potenzrechnung physikalische Formeln zur zahlenmäßigen Auswertung heranzieht. Er unterstützt aber den

Physiker ganz erheblich an dessen Bemühen, operative Wendigkeit in Sinngebung und Gebrauch physikalischer Formeln zu erzielen.

(d) In den Naturwissenschaften - namentlich im Mikro- und im Makrobereich - treten häufig Zahlenwerte von extremer Kleinheit bzw. Größe auf. Das Bemühen, von der Glaubwürdigkeit derartiger numerischer Resultate zu überzeugen, kann nur darin bestehen, in den vielen Fällen, in denen das möglich ist, an Hand klarer, unbezweifelbarer Meßdaten mittels konkreter Rechnung die bestaunten Zahlenwerte zu gewinnen. Da dies zudem oft mit elementarsten Mitteln gelingt, ohne den mathematischen Rahmen zu sprengen, darf die Verwirklichung der angedeuteten Unterrichtskomponente hohen allgemeinbildenden Wert beanspruchen.

(e) Steter Tropfen höhlt den Stein. Wenn der Schüler einen Größenwert, sagen wir die Loschmidt'sche Zahl nicht nur einmal in einer Chemie- und Physikstunde hört, sondern ihm auch bei etlichen Mathematikbeispielen begegnet, dann ist anzunehmen, daß die Zahl besser in seinem Gedächtnis haftet, als wenn das unterbliebe. Das gilt nicht nur für die Loschmidt'sche Zahl, sondern für zahllose andere Daten wie die Massen elementarer Bausteine, der Sonne und der Erde, die Länge des Lichtjahres, die Zahl der Sekunden eines Jahres, die Zeiträume erdgeschichtlicher Epochen, die Größe von Bakterien und Wellenlängen u.s.w. Deshalb ist es in höchstem Maße wünschenswert, seitens der Mathematik anderen Fächern Hilfe angedeihen zu lassen, zumal dabei kein Zeitverlust für das facheigene Unterrichtsprogramm auftritt.

Als Physiker bin ich leider nur imstande, die nachstehenden Illustrationsbeispiele der Physik zu entnehmen. Kollegen, die einen anderen Gegenstand als Physik neben Mathematik unterrichten, mögen dadurc ermuntert werden, meine Einseitigkeit zu überwinden, indem sie aus den von ihnen überschauten Bereichen ähnliche Beispiele zusammenstellen und uns allen für den Gebrauch im Mathematikunterricht anzubieten.

Nun aber genug der einleitenden Bemerkungen, im folgenden sollen die Beispiele in ihr Recht treten. Sie werden - soweit derartige Abgrenzungen möglich sind-nach mathematischen Teilgebieten gegliedert.

Gleichungen. Mit Hilfe des Begriffs der Relativgeschwindigkeit erlauben manche Bewegungsaufgaben die Lösung ohne Ansatzgleichung, womit sie den untersten Schulstufen zugänglich werden, was etwa für die Verkehrserziehung nützlich ist.

(1) Uhrenbeispiel: Wann kommen die Uhrzeiger zum ersten Mal nach 12 Uhr wieder zur Deckung?

Lösung: Schon in den untersten Stufen möge der Mathematiker ausschließlich von der Winkelgeschwindigkeit der Uhrzeiger sprechen! Sie beträgt 6°/min bzw. 0,5°/min für den großen bzw. den kleinen Zeiger. Der große eilt mit 5,5°/min dem kleinen vor und holt ihn von "hinten" nach $360° : 5{,}5°/\text{min} = 65\frac{5}{11}$ min, also $5\frac{5}{11}$ min nach 13 Uhr ein.

(2) Überholen: Nach der Skizze setzt ein 4m langer Kraftwagen mit der Geschwindigkeit v_1 im Abstand von 5m hinter dem ebensolangen Kraftwagen, dessen Geschwindigkeit v_2 ist, zum Überholen an und beendet das Manöver im Abstand 5m vor dem überholten Fahrzeug. Man berechne Überholzeit und -weg!

Lösung: (a) $v_1 = 108\text{km/h} = 30\text{m/s}$, $v_2 = 90\text{km/h} = 25\text{m/s}$, $v_{rel} = 5\text{m/s}$;
$t = 18/5\text{s} = \underline{3{,}6\text{s}}$; $s = 3{,}6.30\text{m} = \underline{108\text{m}}$.

(b) $v_1 = 120\text{km/h} = 100/3\text{m/s}$, $v_2 = 90\text{km/h} = 25\text{m/s}$, $v_{rel} = 25/3\text{m/s}$;
$t = 18:(25/3)\text{s} = \underline{2{,}16\text{m/s}}$; $s = 2{,}16.100/3\text{m} = \underline{72\text{m}}$.

Selbst der raschere Fahrer benötigt 72m von der Überholfahrbahn also, da sich auch entgegenkommende Fahrzeuge bewegen, 144m freie Überholstrecke, um ohne Schaden die alte Spur wieder zu erreichen!

(3) Zugsbewegung: Salzburg (S) und Wien (W) haben etwa $d = 300$ Bahn-km. Abstand. Von Salzburg fährt ein Zug (Länge 84m) mit 60km/h nach Wien, gleichzeitig startet ein Zug (Länge 91m) mit 90km/h in W. Richtung S. (a) Wann und wo begegnen sie einander? (b) Wie lange währt das Aneinandervorbeifahren während der Begegnung?

Lösung: (a) Die Züge bewegen sich mit der Relativgeschw. 60 + 90km/h = 150km/h. Die Begegnung erfolgt daher nach $d/(v_1+v_2) = 300/150\,h = \underline{2h}$ im Abstand $2.60km = \underline{120km\ von\ S}$ und $2.90km = \underline{180km\ von\ W}$.

(b) Zu Beginn der Passage liegt zwischen den Schlußlichtern der beiden Züge die Summe der Zugslängen als Distanz. Die Vorbeifahrt dauert somit $t = (l_1+l_2)/(v_1+v_2) = (84+91)/(\frac{50}{3}+25)s = \underline{4,2s.}$

Während in den Aufgaben (1) - (3) die Eleganz des Lösungsverfahrens auf der Verwendung des Begriffs der Relativgeschwindigkeit beruht, kommt in der nächsten Aufgabe - wegen der Forderung nach ganzzahligen Lösungswerten - ein wenig Zahlentheorie zur Geltung. Aufgabe (5), (6) führen auf quadratische Gleichungen.

(4) Widerstandsschaltung. Zwei parallel geschaltete Leiterstücke mit den elektrischen Widerständen R_1, R_2 sollen den Gesamtwiderstand R haben. Welche ganzzahligen Ohmwerte dürfen R_1, R_2 haben, wenn R ganzzahlig vorgegeben ist?

Lösung: Die drei Widerstände müssen die Gleichung $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ erfüllen. Nach Beseitigung der Nenner und Reduktion der rechten Seite auf Null ergibt sich $R_1.R_2 - R(R_1 + R_2) = 0$ oder $R_1.R_2 - R(R_1+R_2) + R^2 = R^2$, $(R_1-R).(R_2-R) = R^2 = \alpha.\beta$, $\alpha, \beta \in N$. $R_1 - R = \alpha$, $R_2 - R = \beta$, $\underline{R_1 = \alpha + R, R_2 = \beta + R.}$

Zahlenbeispiel: $R = 10$, $R^2 = 100 =$
$= \alpha.\beta =$

	R_1	R_2
= 1.100	11	110
= 2. 50	12	60
= 4. 25	14	35
= 5. 20	15	30
=10. 10	20	20

(5) Gravitation. In welchem Abstand x vom Erdmittelpunkt liegt der Punkt P der Verbindungsstrecke Erde-Mond, in dem die Gravitationskräfte der beiden Körper einander aufheben? Gravitationsgesetz: $F = G.m_1.m_2/r^2$ Distanz Erde-Mond = 384 000 km, die Erdmasse m_1 ist 81 mal größer als die Mondmasse m_2. Die Gravitationskonstante ist hier unwichtig.

Lösung: Ein Körper der Masse u wird im Punkt P von der Erde mit der Kraft $G.81m_2/x^2$, vom Mond mit der Kraft $G.m_2/(d-x)^2$ in entgegengesetzter Richtung angezogen. Die resultierende Kraft ist Null für $G.81m_2/x^2 = G.m_2/(d-x)^2$. Daraus folg $81(d-x)^2 = x^2$. Wegen $d > x > 0$ darf beiderseits die Wurzel gezogen werden mit dem Ergebnis $x = 0,9.d = \underline{345\ 000 \text{km}}$

(6) Elastischer Stoß. Beim zentralen Stoß zweier elastischer Kugeln (Massen m_1, m_2) bestehen zwischen den Geschwindigkeiten v_1, v_2 vor und jenen u_1, u_2 nach dem Stoß die Gleichungen

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \quad \text{... Impulserhaltung}$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} \quad \text{... Energieerhaltung.}$$

u_1, u_2 sind zu bestimmen!

Das Ergebnis lautet: $u_1 = [2m_2v_2 + v_1(m_1-m_2)]/(m_1+m_2)$,

$$\underline{u_2 = [2m_1v_1 + v_2(m_2-m_1)]/(m_1+m_2)}.$$

Proportionen. Klagen, daß man bei der Verwendung von Proportionen im Physikunterricht auf Schwächen der Schüler stößt, legen die Verwendung einschlägiger Aufgaben im Mathematikunterricht nahe. Die häufige Verbindung solcher Beispiele mit Potenzen wird im Abschnitt "Potenzen" ausgenützt.

(7) Formänderungsarbeit. Der Schaden bei der Kollision eines Fahrzeugs mit einem unbeweglichen Objekt hängt von der Geschwindigkeit v des Fahrzeugs ab. Er tritt im wesentlichen als Formänderungsarbeit an Mensch und Maschine in Erscheinung, ist also - nach der Formel $E=mv^2/2$ für die kinetische Energie - zum Quadrat der Geschwindigkeit propor-

tional. Angesichts des Unfallgeschehens ist die Schule verpflichtet, die Gefahrensituation konkret und eindringlich zu schildern.

Die Aufgabe: Wie verhalten sich die kinetischen Energien von Fahrzeugen, die mit den in der Tabelle angegebenen Geschwindigkeiten unelastisch mit einem unverrückbaren Hindernis kollidieren?

v (km/h)	18	36	54	72	90	108	144	180
v (m/s)	5	10	15	20	25	30	40	50
E_{kin}	1 :	4 :	9 :	16 :	25 :	36 :	64 :	100
E_{kin}				1 :	1,56 :	2,25 :	4 :	6,25

Die gesuchten Verhältnisse sind in den beiden letzten Zeilen der Tabelle angeführt. Ihre Sprache ist eindringlicher als alle abstrakten Ermahnungen!

(8) Schwerebeschleunigung. Die Schwerebeschleunigung g ist zum Quadrat der Entfernung r vom Zentrum des felderzeugenden Körpers verkehrt proportional. (a) Wie groß ist die Schwerebeschleunigung seitens der Erde in der Entfernung R des Mondes (R = 60 Erdradien r)? (b) Wie lang ist der Fallweg von diesem Abstand aus in einer Stunde?

Lösung: (a) $g(R) : g(r) = 1^2 : 60^2$, $g(r) \approx 10\,m/s^2$, $g(R) = 10/60^2 = \underline{2{,}7\,mm/s^2}$.

(b) $s = \frac{g(R)}{2} \cdot t^2 = \frac{2{,}7}{2} \cdot 3600^2\,mm = \underline{17{,}5\,km}$.

Potenzen (mit Proportionen)

(9) Wie groß ist die Schwerebeschleunigung auf der "Oberfläche" der Sonne? (Formel: $g = GM/r^2$, Grav.-Konst. $G = \frac{20}{3} \cdot 10^{-11}$ SI-Einh., $M_\odot = 2.10^{30}\,kg$, $r_\odot = 7.10^8\,m$).

Lösung: $\underline{g_\odot = 274\,m/s^2}$, ausgedrückt durch die Erdbeschleunigung g: $\underline{g_\odot \approx 28.g}$. Veranschaulichung: Selbst wenn der zum Sprechen benötigte Teil der Zunge nur 100g Masse hätte, wäre ihr Gewicht auf der Sonnenoberfläche gleich dem Gewicht einer 2,8kg-Masse auf der Erde! Man könnte auf der Sonne nicht einmal lallen!

(10) Wie groß ist die Schwerebeschleunigung auf der Oberfläche eines Neutronensterns (N-St) von doppelter Sonnenmasse und 14 km Radius?

Lösung: Nach der Formel in (9) ist g zur Masse M direkt, zu r^2 verkehrt proportional. Da der N-St die doppelte Sonnenmasse und den 2.10^{-5}-fachen Sonnenradius hat, gilt

$$g_{N\text{-}St} = 2/(2.10^{-5})^2 . g_{☉} = [2/(2.10^{-5})^2].28.g_{Erde} = \underline{1,4.10^{11}.g_{Erde}}.$$

Veranschaulichung: $1 mm^3$ Wasser wiegt dort soviel wie $140 m^3$ Wasser auf der Erde.

(11) "Eroberung" des Weltraumes. Das lächerliche Gerede von der "Eroberung" des Weltraums durch Raumsonden in der Presse verlangt, daß die Schule die Verhältnisse für die Jugendlichen zurechtrückt und den großsprecherischen Verzerrungen, hinter denen Unwissenheit, Sensationsgier und Profitsucht stecken, mit schlagkräftigen Argumenten entgegentritt! Angenommen, man könnte mit Raumsonden im Planetensystem (Durchmesser $d_{PS} \approx 12$ Mrd.km) so herumkutschieren wie dzt. mit Flugzeugen auf der Erde. Denkt man sich das Universum (Durchmesser des heute überblickbaren Kosmos $d_U \approx 2.10^{10}$ Lj.) auf die Größe des Sonnensystems verkleinert, so erhebt sich die Frage, welche Distanz x im verkleinerten Modell der angenommenen (weit übertriebenen) Reichweite der heutigen Raummissionen entspräche.

Lösung: 1 Jahr hat $3,16.10^7$s, die Lichtgeschwindigkeit ist $c=3.10^8$m/s, also hat 1 Lj (die Distanz, die das Licht in 1 Jahr zurücklegt) ca. 10^{16}m. Daraus folgt $d_U = 2.10^{10}.10^{16}m = 2.10^{26}m$. x erhält man aus der Proportion $x:d_{PS} = d_{PS}:d_U$, mit $d_{PS} = 1,2.10^{13}$m. $\underline{x = 0,72m}$.

Die Reichweite einer noch gar nicht erreichten Raumfahrt-Perfektion verhält sich zur Größe des Universums ebenso, als würde ein Mensch die Staatsgrenze um 72cm überschreiten und dann triumphieren, er hätte das Sonnensystem erobert!

(12) Wieviele Protonen (Durchmesser $d_p \approx 2.10^{-15}$m) hätten, könnte man sie ganz dicht nebeneinander packen, Platz im Universum (Durchmesser $d_U = 2.10^{26}$m)?

Lösung: Das Volumen ist zum Kubus des Radius proportional. Daher ist die gesuchte Anzahl n gleich dem Kubus von d_U/d_P

$$n = (2.10^{26}/2.10^{-15})^3 = \underline{10^{126}}.$$

(13) Interstellare Materie. In den von Wasserstoffwolken freien Teilen des Raumes zwischen den Sternen befindet sich im Mittel ein H-Atom (Masse $m_H = 1{,}6.10^{-27}$kg) in jedem cm^3. (a) Welche Masse M besitzt die interstellare Materie im Volumen der Sonne ($r_S = 7.10^8$m), innerhalb einer Kugel von 1 Lj ($\approx 10^{16}$m) Radius?

Lösung: (a) $M = [\frac{4\pi}{3}(7.10^8)^3].1{,}6.10^{-21}\text{kg} = \underline{2\ 200\text{t}}$, denn die Dichte ist $\rho = 1{,}6.10^{-27}/(10^{-2})^3\text{kg/m}^3$.

Veranschaulichung: Ein Steinwürfel gleicher Masse der Dichte $2{,}5\text{t/m}^3$ hätte nur die Seitenlänge $s = \sqrt[3]{2200/2{,}5}\text{m} = \underline{9{,}6\text{m}}$.

(b) $$M = [\frac{4\pi}{3}(10^{16})^3].1{,}6.10^{-21}\text{kg} = \underline{6{,}4.10^{27}\text{kg}}.$$

Veranschaulichung: Jupiter hat die Masse $1{,}9.10^{27}$kg, also entspricht M etwa 3,4 Jupitermassen.

(14) Fluchtgeschwindigkeit. Welchen Radius R müßte die Erde ($r \approx 6{,}4.10^6$m) bei gleichbleibender Dichte haben, damit die Fluchtgeschwindigkeit v_F von ihrer Oberfläche gleich der Lichtgeschwindigkeit $c = 3.10^8$m/s wäre? ($v_F = \sqrt{2GM/r}$).

Lösung: Das Problem wurde bereits von Laplace aufgeworfen. Eine einfache Proportionalitätsüberlegung führt rasch zum Ziel. Wenn sich der Radius (bei gleichbleibender Dichte) ver-n-facht, dann folgt daraus

$$r \to n.r \Rightarrow M \to n^3.r, \text{ also } v_F \to \sqrt{n^3/n}.v_F = n.v_F,\ n = c/v_F.$$

v_F von der Erdoberfläche beträgt 11,2km/s, daher

$$n = 3.10^8/1{,}12.10^4 = 2{,}7.10^4,$$

$$R = 6{,}4.10^6.2{,}7.10^4\text{m} = \underline{1{,}7.10^{11}\text{m}}.$$

Veranschaulichung: Gemessen am Erdbahnradius $\approx 1{,}5.10^{11}$m, würde die vergrößerte Erde eine Kugel sein, in der die ganze Erdbahn bequem Platz fände.

(15) <u>Schwarzschildradius</u>. Wenn ein Stern infolge seiner (genügend großen!) Masse durch die eigene übermächtig gewordene Schwerkraft soweit kollabiert, daß es sich unter die Größe der sogenannten Schwarzschild-Kugel kontrahiert (R_s = Schwarzschildradius) hat, dann läßt seine Schwerkraft nicht einmal mehr das Licht nach außen dringen. Der Stern ist ein Schwarzes Loch geworden, $R_s = 2GM/c^2$. Wie groß ist (a) R_s der Sonne ($M_\odot = 2.10^{30}$kg), (b) der Erde ($M_e = 6.10^{24}$kg)? Die Gravitationskonstante $G = \frac{20}{3} \cdot 10^{-11}$ SI-Einheiten.

<u>Lösung</u>: (a) $R_s = \frac{20}{3} \cdot 2.2.10^{30}/(3.10^8)^2$m = <u>3km</u>.

(b) R_s ist zur Masse proporitonal. Die Erdmasse ist 333 000mal kleiner als $M_\odot$, also R_s(Erde) = R_s(Sonne)/333 000 = <u>9mm</u>.

(16) <u>Sonnenenergie</u>. Die Sonne strahlt nach allen Richtungen im Abstand der Erde die Leistungsdiche $\Phi = 1{,}35$kW/m^2 in den Raum. (a) Wie groß ist die Gesamtleistung L der Sonne, (b) welchen Massenverlust ΔM (gemäß der Einsteinschen Gleichung $E = M.c^2$) erleidet dadurch die Sonne pro Sekunde, (c) welchen Bruchteil ihrer Masse hätte sie bei konstanter Strahlung seit dem Entstehen des Sonnensytems vor 4,5 Mrd. Jahren verloren? (Sonnenmasse $M_\odot = 2.10^{30}$kg, Erdbahnradius $R = 1{,}5.10^{11}$m).

<u>Lösung</u>: (a) $L = 4\pi(1{,}5.10^{11})^2.1{,}35.10^3$W ≈ <u>$3{,}7.10^{26}$W</u>.

(b) $\Delta M = -L/c^2 = -4{,}1.10^9$kg/s ≈ <u>-4Mio.Tonnen/s</u>.

(c) $4{,}5.10^9$ a $= 4.5.10^9.3{,}1.10^7$s $= 1{,}4.10^{17}$s,

Verlust: $= 4{,}1.10^9.1{,}4.10^{17}$kg = <u>$5{,}6.10^{26}$kg</u>.

Das sind, gemessen an der dzt. Sonnenmasse, 0,028%. Das Ergebnis zur Frage (c) bringt erst richtig zu Bewußtsein, was 2.10^{30}kg bedeuten!

<u>Elimination</u>.

(17) <u>Freier Fall, Sprung</u>. Für Fallhöhe (Sprunghöhe) und Endgeschwindigkeit nach t Sekunden (Startgeschwindigkeit) gelten die Formeln

$$H = \frac{g}{2} \cdot t^2, \quad v = g.t.$$

(a) Welche Beziehungen bestehen zwischen H und v? (b) Mit welcher

Geschwindigkeit v muß man hochspringen, damit der Schwerpunkt um $H = 0{,}8\,m$ gehoben wird? (c) Wie hoch wäre derselbe Sprung auf dem Mond? ($g_{Erde} \approx 10\,m/s^2$, $g_{Mond} \approx 1{,}6\,m/s^2$).

Lösung: (a) Die Elimination von t liefert die Formeln $\underline{v = \sqrt{2gH}}$, $\underline{H = v^2/2g}$. (b) $v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}8}\,m/s = 4\,m/s$. (c) $v = 4\,m/s \Rightarrow H = 16/2 \cdot 1{,}6\,m = \underline{5m}$

Veranschaulichung: Auf dem Mond könnte man vom Boden leicht durch das offene Fenster in den 1. Stock springen. Die Sprungdauer T bis zum Wiederberühren der Absprungebene ist die doppelte Steigdauer, nämlich $T = 2 \cdot t = 2 \cdot v/g_{Mond} = \underline{6{,}25s}$, das ist ziemlich lang!

Funktionen.

(18) Kondensatorfeld. Ist P eine Ebene, mit positiver Elektrizität geladene Platte, so ist die potentielle Energie U einer negativen Ladung proportional ihrem Abstand von P: $U = k \cdot |x|$. Zwei parallele ebene Platten im Abstand d bilden einen Kondensator (s.Abb.). Die linke Platte P_l sei positiv, die rechte P_r ebenso stark negativ geladen. Man berechne (für $k = 1$) den Funktionsterm und zeichne den Funktionsgraphen für die potentielle Energie U!

Lösung: Die linke Platte liefert den Beitrag $U_l = |x|$, die rechte den Beitrag $U_r = -|x-d|$, also ergibt sich $\underline{U = |x| - |x-d|}$ oder, auf die Gebiete I, II, III zugeschnitten, $U_I = -d$, $U_{II} = 2x-d$, $U_{III} = d$. Der Funktionsgraph ist die stark ausgezogene Linie in der Abbildung.

Dies ist ein Beispiel für das Auftreten der Betragsfunktion in Physik und Technik!

Verknüpfungen.

(19) Führt man $\beta = v/c$ ein, so lautet das klassische Theorem der Geschwindigkeitsaddition $\beta = \beta_1 + \beta_2$. In der relativistischen Kinematik hat es jedoch die Form $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$. Man beweise, daß das Verknüpfungsgebilde ($|\beta| < 1, \oplus$) abgeschlossen gegenüber der Verknüpfung $\oplus$ ist!

Lösung: Es wird also behauptet $-1 < \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} < 1$ für alle $|\beta_{1,2}| < 1$. Wegen der Voraussetzung über β ist der Nenner stets positiv, d.h. es darf mit ihm jeder der drei Terme in den Ungleichungen ohne Folgen multipliziert werden.

$-1-\beta_1\beta_2 < \beta_1\beta_2$ $\qquad$ $\beta_1+\beta_2 < 1+\beta_1\beta_2$ $\qquad$ Die Ungleichungen

$0 < (1+\beta_1)(1+\beta_2)$, $\qquad$ $0 < (1-\beta_1)(1-\beta_2)$. in der letzten Zeile sind lt. Vor. über β stets erfüllt, denn alle Klammerausdrücke sind positiv, wzbw.

Veranschaulichung: $v_1 = v_2 = c/2$, $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}5$.

$$v = v_1 \oplus v_2 = c.(\beta_1 \oplus \beta_2) = c.\frac{0{,}5+0{,}5}{1+(0{,}5)^2} = 0{,}8.c.$$

c ist unerreichbar!

Zur Selbsttätigkeit interessierter Schüler kann man diese auffordern, den Gruppencharakter des Verknüpfungsbildes zu beweisen.

Vektoren

(20) Kraftsystem. Drei gleichgroße Massen M, die einander gravitativ anziehen, sitzen in den Ecken A,B,C eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge d (s.Abb.). Das vektoriell geschriebene Gravitationsgesetz lautet $\mathfrak{F}_{12} = \frac{G.m_1.m_2}{r^3}.\mathfrak{r}_{12}$ $\mathfrak{F}_{12}$ ist die Kraft, mit der m_1 von m_2 angezogen wird. $\mathfrak{r}_{12}$ ist der Vektor von m_1 nach m_2. Welche Kraft $\mathfrak{K}$ wirkt auf die Masse im Punkt C?

Lösung: Bezeichnen $\mathfrak{F}_A, \mathfrak{F}_B$ die von den Massen in A bzw. B auf die Masse in C ausgeübten Kräfte und sind $F = GM^2/d^2$ ihre Beträge (nach dem Gravit.-Ges.), so gilt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}_A &= (-F/2,\ -F\sqrt{3}/2),\\ \mathfrak{F}_B &= (\ F/2,\ -F\sqrt{3}/2),\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\mathfrak{K} = \mathfrak{F}_A + \mathfrak{F}_B = (0, -F\sqrt{3}),\ R = \frac{GM^2}{d^2}\sqrt{3}.}$$

Numerische Approximationen

(21) Relativistische Massenzunahme. Die Ruhmasse m_0 eines mit der Geschwindigkeit v relativ zum ruhenden Beobachter B bewegten Körpers wächst für B auf $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$, an. Man entwickle Näherungsformeln für m, wenn (a) $|\beta| \ll 1$, (b) $|\beta| = 1-\delta$, $0 < \delta \ll 1$, gilt.

Lösung: (a) Wenn $|\beta|$ sehr klein ist, darf man approximativ so rechnen, als ob die Verknüpfungsregel $\beta^2 = 0$ gälte. D.h. alle höheren Potenzen von β werden gleich Null gesetzt.

Behauptung: $1/\sqrt{1-\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ für $|\varepsilon| \ll 1$.

Beweis:

$$\begin{array}{c|l} 1 & (1+\frac{\varepsilon}{2})^2 \cdot (1-\varepsilon) \\ 1 & (1+\varepsilon+0)(1-\varepsilon) \\ 1 & 1-0 \end{array} \qquad \text{wzbw.}$$

Daraus folgt für m: $m \approx m_0(1+\frac{\beta^2}{2})$ und $m.c^2 \approx m_0.c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} = E$.

Der zweite Summand ist der bekannte Ausdruck für die kinetische Energie. Also bedeutet auch der erste aus Dimensionsgründen eine Energie! Dies ist die Ruhenergie einer Masse m_0, in ihr kommt die Äquivalenz von Masse und Energie zum Ausdruck!

(b) $|\beta| = 1-\delta$, $\delta = (c-v)/c$. $m = m_0/\sqrt{1-(1-\delta)^2} \approx m_0/\sqrt{2\delta}$.

In den großen Teilchenbeschleunigern nimmt $n = m/m_0$ sehr große Werte an, die gemessen werden können. Daraus folgt für den "Defekt" der Teilchengeschwindigkeit c-v gegenüber c: $c - v = c/2n^2$.

Veranschaulichung: In der großen europäischen Beschleunigeranlage CERN bei Genf erreichen Protonen gut die 400fache Ruhmasse: $c-v = 3.10^8/2.400^2 m/s \approx 9km/s$, sie sind nur mehr um 9km/s langsamer als das Licht!

Folgen

(22) Gaskompression. Jede Betätigung einer Fahrradpumpe erhöht ihre Temperatur, weil die Kompression von Gasen stets mit Erwärmung verbunden ist. Das einfachste Modell, das den Grund für die Erscheinung verstehen läßt, ist ein Rohr, das auf einer Seite unbeweglich abgeschlossen ist, während sich vom anderen Ende her ein Stempel mit der konstanten Geschwindigkeit w dem festen Verschluß nähert. Falls sich im Inneren des Rohres eine elastische Kugel parallel zur Achse des Rohres gleichförmig bewegt, erfährt sie bei jeder elastischen Kollision mit der Wand und dem Kolben eine Reflexion. Dabei ändert sich nur

am Kolben der Betrag ihrer Geschwindigkeit, der beim Rückprall von der Wand erhalten bleibt. Beginnt der Vorgang mit der Kugelgeschwindigkeit $v_o = v$, so bilden die Geschwindigkeiten $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ nach der 1., 2., ... n-ten Reflexion am Kolben eine Folge $\langle v_n \rangle$. Die Folge ist (a) rekursiv, (b) durch den erzeugenden Term darzustellen!

Lösung: (a) Für einen Beobachter, der sich mit dem Kolben bewegt, ändert die Relativgeschwindigkeit der Kugel bzgl. des Kolbens bei jeder Reflexion am Kolben nur ihr Vorzeichen. Diese Relativgeschwindigkeit hat für den bewegten Beobachter bei der Annäherung an den Kolben nach der n-ten Kollision den Betrag $v_n + w$, ebenso nach der (n+1)-sten Kollision. Für den ruhenden Beobachter hat die Kugel nachher jedoch die Geschwindigkeit $\underline{v_{n+1} = v_n + 2w,\ v_o = v}$, weil ja die Eigenbewegung des Kolbens hinzuzurechnen ist. Das ist nun die gesuchte Rekursion.

(b) $\langle v_n \rangle$ ist eine arithmetische Folge mit dem erzeugenden Term

$$\underline{v_n = v + 2.n.w.}$$

Bemerkung: Bewegt sich der Kolben vom festen Rohrende weg, dann ist w durch -w zu ersetzen. Der Prozeß endet, sobald $v_{n+1} < w$ wäre. w bleibt im ersten Fall (Kompression) nur durch Arbeitsverrichtung am Kolben konstant: Das Aufpumpen des Fahrradreifens ist daher anstrengend. Absinkende Luftmassen werden infolge des Übergang in Schichten höheren Drucks komprimiert, also erwärmt!

(23) Thermalisierung von Neutronen. Eine Kugel K der Masse m und der kinetischen Energie E_o stoße zentral und elastisch mit einer ruhenden Kugel der k-fachen Masse zusammen. Nach dem Stoß hat die Kugel K die kinetische Energie $E_1 = E_o\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2$.

(a) Man gebe die Folge $\langle E_n \rangle$ für sukzessive Kollisionen von K an lauter ruhenden Kugeln der Masse k.m an! (b) Wieviele Kollisionen muß ein hochenergetisches Neutron an Kohlenstoffatomen erleben, bis seine Energie auf den 10^8-ten Teil von E_o gesunken ist (dann hat das Neutron dieselbe Energie wie die Moleküle der Luft im Zimmer)? Das Kohlenstoffatom ^{12}C hat die 12-fache Masse des Neutrons, $k = 12$.

Lösung: (a) Die E_n bilden die geometrische Folge

$$E_{n+1} = E_n \cdot \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = E_o \cdot \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{2n+2}$$

(b) $E_n = E_o\left(\frac{11}{13}\right)^{2n}$, $n = 55,1\ldots$

Die Thermalisierung ist nach 56 Stößen erreicht.

Trigonometrie

(24) Beugung am Spalt. Trifft ein Lichtstrahl (Wellenlänge λ) auf einen engen Spalt, dessen Breite nur wenige Wellenlängen beträgt, so geht das Licht hinter dem Spalt nach allen Richtungen weiter, man sagt, es wird gebeugt. (a) Welchen Gangunterschied haben die von zwei im Abstand d/2 befindlichen Spaltpunkten A,B (s.Abb.) unter dem Winkel α gegen die Einfallsrichtung ausgehenden Teilstrahlen? (b) Beim Gangunterschied $\delta_n = n.\lambda$, $n \in N$, verstärken die Strahlen einander, auf dem Schirm im Abstand a zum Spalt erscheint eine helle Linie als Spaltbild. In welchem Abstand y_n vom Schirmmittelpunkt M erscheint die Mitte einer hellen Linie für $n = 1$ und $n = 2$?

Lösung: (a) Aus der Figur folgt $\delta = \frac{d}{2} \cdot \sin\alpha$.

(b) Für $d = 10^{-5}$m, $\lambda = 5.10^{-7}$m, $a = 0{,}2$m erhält man:

$n = 1$: $\frac{d}{2} \cdot \sin\alpha_1 = \lambda$, $5.10^{-6}.\sin\alpha_1 = 5.10^{-7}$, $\alpha_1 = 5^o44'$, $y_1 = 2$cm.

$n = 2$: $5.10^{-6}.\sin\alpha_2 = 2.5.10^{-7}$, $\alpha_2 = 11^o32'$, $y_2 = 4{,}08$cm.

(25) Schwebungen. Die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen $y_1 = \sin\omega_1 t$, $y_2 = \sin\omega_2 t$, deren Kreisfrequenzen (= Zahl der Schwingungen in 2π Sekunden) sich nur ganz geringfügig unterscheiden, gibt die Schwingung $Y = y_1 + y_2$. Ihr Zeitverlauf ist zu diskutieren!

Lösung: Nach dem 2. Summensatz erhält man

$$Y = 2.\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t,\ \cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t.$$

Der sin-Faktor ist rasch, der cos-Faktor wegen $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ nur sehr langsam veränderlich. Bei Schallwellen hört man also einen periodisch anschwellenden und abklingenden Ton. (s.Abb.)

(26) Stehende Wellen. $y_1 = A.\sin(x-vt)$ beschreibt eine mit der Geschwindigkeit v nach rechts, $y_2 = A.\sin(x+vt)$ eine ebensolche nach links fortschreitende Welle. Man diskutiere die Überlagerungsschwingung!

Lösung: Nach dem 2. Summensatz erhält man $Y = y_1 + y_2 = \underline{(2A.\sin x).\cos vt}$. Der Klammerausdruck hängt nur vom Schwingungsort x, der andere Faktor nur von der Zeit ab. D.h., jeder Punkt der Seite schwingt mit der ihm zugehörigen Amplitude, die bei $x = n\pi$ ihre Maxima, bei $x = (n+\frac{1}{2})\pi$ ihre **Nullstellen (Knoten) hat. (s.Abb.)**

(27) Drehstrom. Man zeige, daß drei Wechselspannungen gleicher Amplitude und Frequenz, die gegeneinander um $T/3$ bzw. $2T/3$ phasenverschoben sind (T = Schwingungsperiode $= 2\pi/\omega$, ω = Kreisfrequenz = Zahl der Schwingungen in 2π Sekunden), einander aufheben!

Lösung: Die drei Spannungen haben den Zeitverlauf $U_1 = U_0.\sin\omega t$, $U_2 = 2U_0.\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$, $U_3 = U_0.\sin(\omega t + \frac{4\pi}{3})$. Die Gesamtspannung ist daher $U = U_0.[\sin\omega t + \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3})]$. Der zweite Summensatz, angewandt auf den ersten und dritten Summanden rechts, gibt $U = U_0.[2\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}).\cos\frac{2\pi}{3} + \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})] = 0$, wzbw.

Besonders einfach ist die vektorielle Methode. Man faßt jede der drei Spannungen als die Projektionen eines um den Ursprung mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Vektoren auf die y-Achse auf. Die drei Drehvektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ (s.Abb.) haben die Anordnung eines Drei-Speichenrades (Mercedes-Stern), ihre Vektorsumme ist der Nullvektor, also ist auch ihre Projektionssumme Null.

(28) Gleichrichtung. Gleichgerichteter Wechselstrom wird nur in einer Richtung geleitet. Wie lautet der seinen Zeitverlauf beschreibende Funktionsterm, wenn der ursprüngliche Wechselstrom den Zeitverlauf $I = I_0.\sin\omega t$ hatte?

Lösung:

$$I_{gl} = \begin{cases} I_0.\sin\omega t & \text{in den Zeitintervallen } [2n\pi/\omega, (2n+1)\pi/\omega], n\in\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{in den Zeitintervallen } [(2n+1)\pi/\omega, (2n+1)\pi/\omega], n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Analytische Geometrie.

(29) Hohlspiegelgleichung. Die gegenseitige Abhängigkeit von Gegenstandsweite g und Bildweite b, ausgedrückt in der Hohlspiegelgleichung $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$, $f=r/2=$ Brennweite des sphärischen Hohlspiegels, läßt sich mit Hilfe des abgebildeten Nomogramms numerisch ablesen. Dies ist zu beweisen!

Lösung: Die Gleichung einer Geraden mit den Achsenabschnitten g,b lautet $\frac{x}{g}+\frac{y}{b}=1$. Liegt der Punkt P(f,f) auf ihr, dann ist die Gleichung $\frac{f}{g}+\frac{f}{b}=1$ erfüllt. Beiderseitige Division durch f liefert die Hohlspiegelgleichung, wzbw.

(30) Fokaleigenschaft. Lichtstrahlen, die, von einem Brennpunkt einer Ellipse kommend, an ihr reflektiert werden, vereinigen sich wieder im zweiten Brennpunkt! Das Beispiel ist altbekannt, es erübrigt sich, den Beweis hier auszuführen.

(31) Fokaleigenschaft. Lichtstrahlen, die, vom Brennpunkt einer Parabel ausgehend, an ihr reflektiert werden, verlaufen danach parallel zur Parabelachse! Auch dieser Beweis darf hier übergangen werden.

Differentialrechnung

(32) Fermat-Prinzip. Die Reflexion eines Lichtstrahls an einer ebenen Wand erfolgt so, daß der Weg des Lichtes von der Quelle Q zum Aufpunkt A in der kürzest möglichen Zeit zurückgelegt wird. Man leite daraus das Reflexionsgesetz her! (S. Abb.)

Lösung: Wegen der in diesem Falle gleichbleibenden Lichtgeschwindigkeit genügt die Bestimmung des kürzesten Lichtweges s zwischen Q und A:

$$s=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{c^2+(b-x)^2}\rightarrow \text{Min.}$$

$$s'=\frac{x}{\overline{QR}}-\frac{b-x}{\overline{RA}}=0\Rightarrow \underline{\sin\alpha-\sin\beta=0},$$

Unter den gegebenen Bedingungen folgt daraus $\alpha=\beta$, wzbw. Die Untersuchung von s" möge hier unterbleiben.

(33) Fermat-Prinzip. Dieselbe Fragestellung wie in (32) für den Übergang von Licht aus einem Medium I in ein anderes II, wenn sich seine (Phasen-)geschwindigkeit dabei von c_1 auf c_2 ändert. (S.Abb.) Das Brechungsgesetz ist daraus abzuleiten!

Lösung: $t = QB/c_1 + BA/c_2 = \frac{1}{c_1}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{(b-x)^2+c^2} \rightarrow$ Min.

$$t' = \frac{x}{c_1 . \overline{QB}} - \frac{b-x}{c_2 . \overline{BA}} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{c_1} - \frac{\sin\beta}{c_2} = 0, \text{ wzbw.}$$

Die Untersuchung von t'' möge unterbleiben.

(34) Kreisbewegung. Die elementare Herleitung des Ausdrucks für die Zentripetalbeschleunigung eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Punkt M im Abstand r rotierenden Körpers K ist methodisch schwierig, weil auf der zuständigen Schulstufe noch nicht differenziert werden kann. Im Mathematikunterricht sollte daher später an diesem Beispiel die Leistungsfähigkeit der Infinitesimalrechnung aufgezeigt werden. Eine treffende Antwort auf die Frage: "Wozu ist das gut?"!

Lösung: $\mathfrak{r} = \binom{r.\cos\omega t}{r.\sin\omega t} = \binom{x}{y}$, $\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}} = \binom{-r\omega\ \sin\omega t}{r\omega\ \cos\omega t} = \binom{-\omega y}{\omega x} \perp \mathfrak{r}$.

$$\mathfrak{a} = \ddot{\mathfrak{r}} = \binom{-r\omega^2 . \cos\omega t}{-r\omega^2 . \sin\omega t} = -\omega^2\binom{x}{y} = -\omega^2 \mathfrak{r}.$$

(35) Schwerkraft. Um wieviel ist ein M = 10t-Flugzeug in h = 10km Höhe leichter als auf N.N.? Die Gewichtskraft auf die Masse m im Abstand r vom Erdzentrum ist $F = mgr_0^2/r^2$, $r_0 = 6{,}37 . 10^3$ km = Erdradius.

Lösung: $dF \approx mgr_0^2 . \frac{-2dr}{r_0^3}$ mit $r = r_0 + dr$, $dr = h$, $F_0 = mg$.

$$dF = -2hF_0/r_0, \quad dF/F_0 = -2h/r_0 = \underline{0{,}0031}.$$

Das Flugzeug wird um ca. 0,3% leichter, d.s. $\underline{300\ N}$.

Integralrechnung mit Wahrscheinlichkeit

(36) $\varphi = C.(2x+3x^2)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer kontinuierlichen Verteilung im Intervall $[0,2]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses im Teilintervall $[\frac{1}{2},1]$?

Lösung: Wegen $\int_0^2 \varphi dx = 1$ liefert diese Normierung den Wert von C.

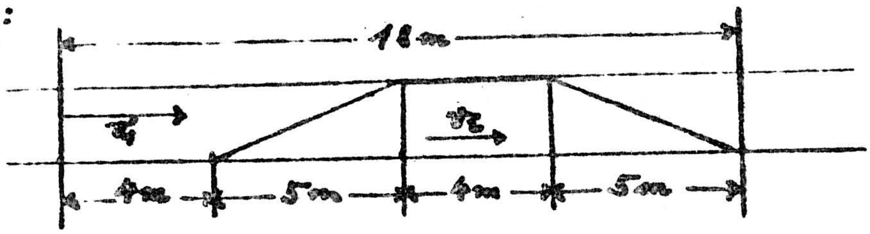
$$1 = C \int_0^2 (2x+3x^2)dx = 12.C \Rightarrow C = 1/12. \quad p(\tfrac{1}{2},1) = \frac{1}{12} \int_{1/2}^{1} (2x+3x^2)dx = \frac{13}{96} = 0{,}135$$

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeitsdichte spielt in der Wärmelehre und in der Quantenphysik eine wichtige Rolle. Ähnliche Aufgaben wie diese unterstützen den Physiklehrer sehr!

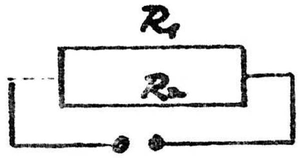
OSTR. Dr. Walter Kranzer
Aslangasse 2/4
1190 W i e n

Abbildungen zu den Aufgaben

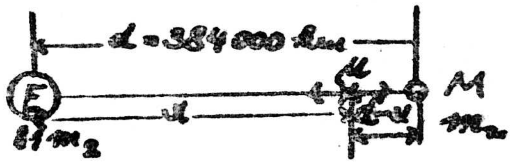
Zu 2):



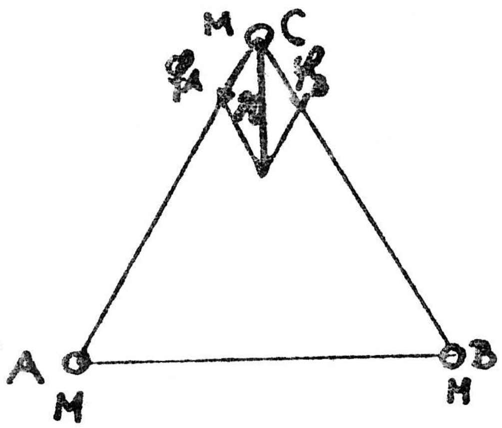
Zu 4):



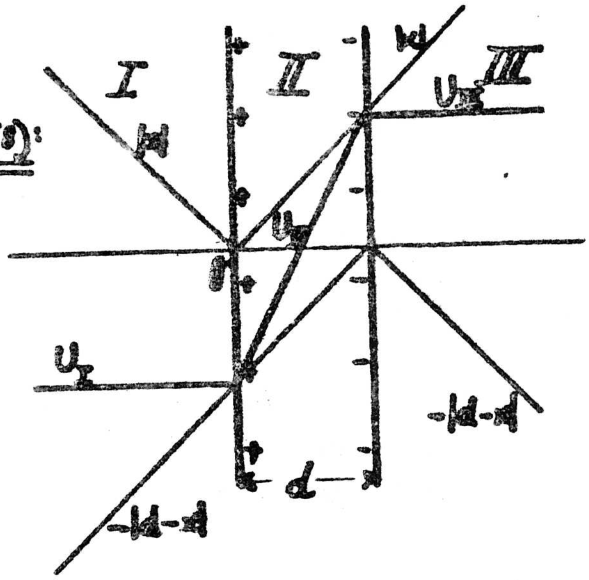
Zu 5):



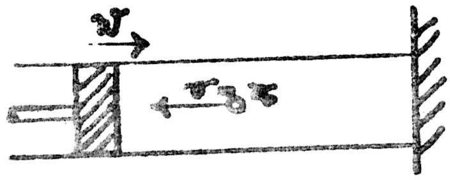
Zu 20):



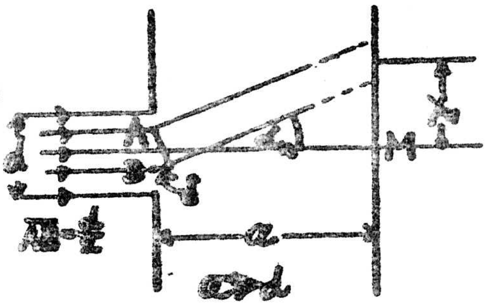
Zu 18):



Zu 22):

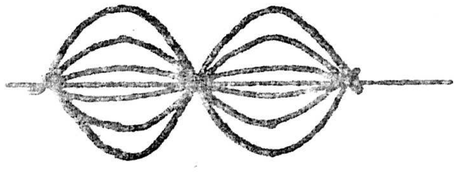


Zu 24):

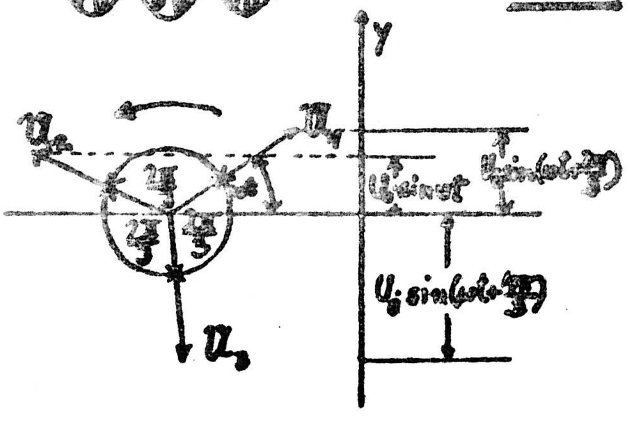


Zu 26):

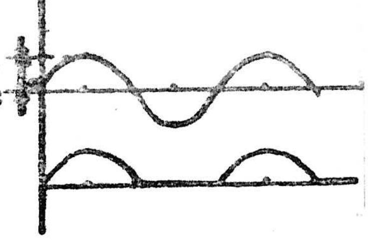
Zu 16):



Zu 27):

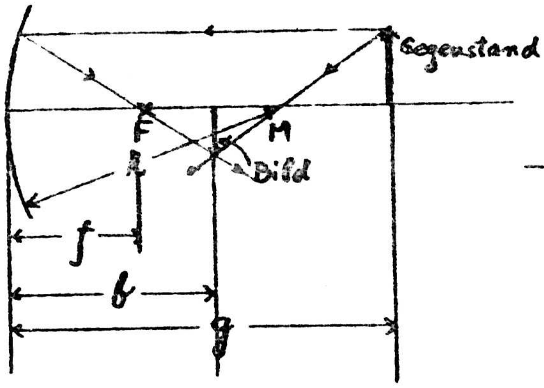


Zu 29):

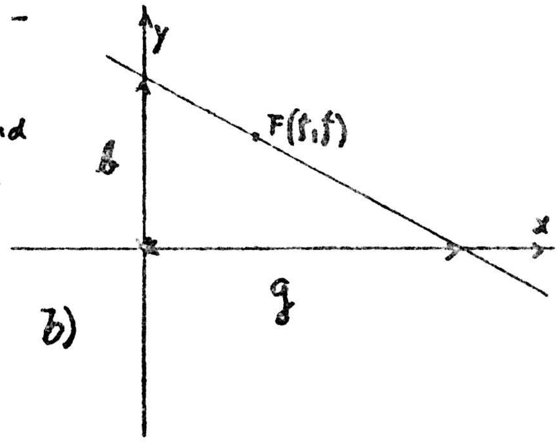


Zu 29):

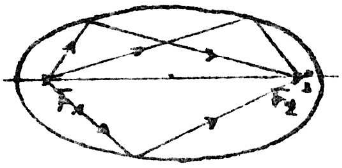
a)



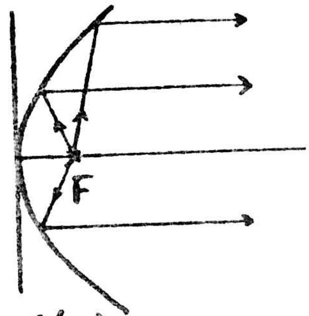
b)



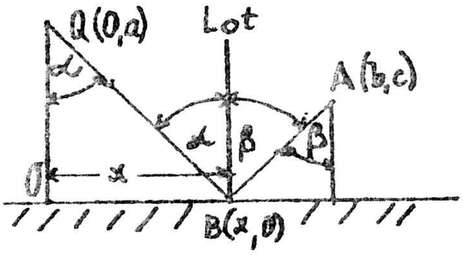
Zu 30):



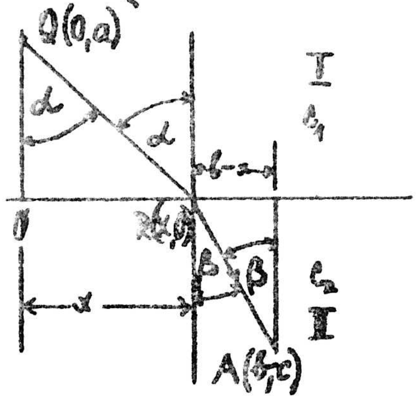
Zu 31):



Zu 32):



Zu 33):



Zu 34):